第35卷 第4期 延安大学学报(自然科学版) Vol.35 No.4
2016年12月 Journal of Yanan University(Natural Science Edition) Dec. 2016

DOI:10.13876/J.cnki.ydnse.2016.04.012

关于 Smarandache 可乘函数与除数函数的混合均值

鲁伟阳[1],高 丽[2]

(1. 陕西延安中学;2. 延安大学 数学与计算机科学学院,陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等方法和解析方法研究了 Smarandache 可乘函数 $f(n)$,$p(n)$ 与除数函数 $\delta_\alpha(n)$ 的混合均值问题,并得到一个较强的渐近公式。

关键词: Smarandache 可乘函数; 除数函数; 混合均值; 渐近公式

中图分类号: O156.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004-602X(2016)04-0012-03

1 引言及结论

对于任意正整数 n,m 且 $(n,m)=1$,著名的 Smarandache 可乘函数 $f(n)$ 定义为 $f(nm)=\max\{f(n),f(m)\}$。显然 Smarandache 可乘函数不是可乘函数,因为当 p,q 为两个不同的素数时,

$$f(p^\alpha p^\beta)\neq f(p^\alpha)f(q^\beta)。$$

文献[1] Tabirca 证明了 Smarandache 可乘函数的一个性质:若 $f(n)$ 是 Smarandache 可乘函数,则 $g(n)=\min\{f(d):d\mid n,d\in\mathbf{N}\}$ 也是 Smarandache 可乘函数。

对于任意的正整数 n,$p(n)$ 表示 n 的最大素因子,$S(n)=\min\{m:m\in\mathbf{N},n\mid m!\}$ 为 Smarandache 函数。显然 $p(n)$ 和 $S(n)$ 都是 Smarandache 可乘函数。文献[2]研究了 Smarandache 函数 $S(n)$ 和 $p(n)$ 的均值分布问题,得到渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

对任意的素数 p 和正整数 α,定义 $f(p^\alpha)=p^{\frac{1}{\alpha}}$。若 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式,则由 $f(p^\alpha)$ 的定义可得

$$f(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{f(p_i^{\alpha_i})\}=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\left\{p_i^{\frac{1}{\alpha_i}}\right\}。$$

显然 $f(n)\leqslant p(n)$。文献[3]研究了 $f(n)$ 和 $p(n)$ 的均值分布问题,得到一个较强的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(f(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)。$$

本文主要在文献[3]的基础上,利用初等方法和解析方法研究了 Smarandache 可乘函数 $f(n)$,$p(n)$ 与除数函数 $\delta_\alpha(n)$ 的混合均值问题,并得到一个较强的渐近公式。即证明了

定理 对任意的实数或复数 α 和实数 $x\geqslant 3$,有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)(f(n)-p(n))^2=\frac{\zeta(\alpha+3)\zeta(2\alpha+3)x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{2\alpha+3}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemannzeta-函数,$c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

收稿日期:2016-09-22

基金项目:陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019);延安大学校级科研计划项目—引导项目(YD2014-05);延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介:鲁伟阳(1989—),男,陕西兴平人,延安中学二级教师。

2 相关引理

引理1[4] 设 $x\geqslant 2$ 为实数,则有 $\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right)$,其中 $a_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $a_1=1$。

引理2[3] 设 p 为素数,且 $\alpha>0$,对任意给定的正整数 m,有渐近公式

$$\sum_{2\leqslant p\leqslant x^{\frac{1}{m}}}p^{\alpha}=\frac{m}{\alpha+1}\cdot\frac{x^{\frac{\alpha+1}{m}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{\alpha+1}{m}}}{\ln^2 x}\right)。$$

引理3 设 p 为素数,且 $\alpha>0$,则有

$$\sum_{p^2\leqslant\frac{x}{n_1}}p^{2\alpha+2}=\frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)n_1^{2\alpha+3}(\ln x-\ln n_1)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{2\alpha+3}\cdot\ln^i n_1}{n_1^{2\alpha+3}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{n_1^{2\alpha+3}\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

证明:由 Abel 求和公式[5]及引理1可得

$$\sum_{p^2\leqslant\frac{x}{n_1}}p^{2\alpha+2}=\left(\frac{x}{n_1}\right)^{2\alpha+2}\cdot\pi\left(\frac{x}{n_1}\right)-(2\alpha+2)\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{x}{n_1}}t^{2\alpha+1}\cdot\pi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{x}{n_1}\right)^{2\alpha+2}\cdot\left(\frac{\frac{x}{n_1}}{\ln\left(\frac{x}{n_1}\right)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{\alpha_i\cdot\frac{x}{n_1}}{\ln^i\left(\frac{x}{n_1}\right)}+O\left(\frac{\frac{x}{n_1}}{\ln^{k+1}\left(\frac{x}{n_1}\right)}\right)\right)-(2\alpha+2)\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{x}{n_1}}\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{\ln t}+\sum_{i=2}^{k}\frac{a_i\cdot t^{2\alpha+2}}{\ln^i t}+O\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{\ln^{k+1}t}\right)\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)n_1^{2\alpha+3}(\ln x-\ln n_1)}+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{2\alpha+3}\cdot\ln^i n_1}{n_1^{2\alpha+3}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{n_1^{2\alpha+3}\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $b_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

引理4[5] 如果 $x\geqslant 1$ 且 $\alpha>0,\alpha\neq 1$,我们有

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_{\alpha}(n)=\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+O(x^{\gamma}),$$

其中 $\gamma=\max\{1,\alpha\}$。

3 定理的证明

为了证明定理,需分以下三种情况讨论:

(Ⅰ)若 $n=n_1p(n)$ 且 $(n_1,p(n))=1$。由 $f(n)$ 的定义可得 $f(n)=\max\{f(n_1),f(p(n))\}=p(n)$,因此 $f(n)-p(n)=0$。

(Ⅱ)若 $n=n_1p^2(n)$ 且 $(n_1,p(n))=1,p(n)\leqslant n^{\frac{1}{2}}$,则

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n=n_1p^2(n)}}\delta_{\alpha}(n)(f(n)-p(n))^2$$

$$=\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_{\alpha}(n_1p^2)(f^2(n_1p^2)-2pf(n_1p^2)+p^2)$$

$$=\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_{\alpha}(n_1p^2)f^2(n_1p^2)-2\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_{\alpha}(n_1p^2)\cdot f(n_1p^2)p+\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_{\alpha}(n_1p^2)p^2$$

$$\equiv I_1-2I_2+I_3。\tag{1}$$

令 p_1 为 n 的最大素因子,若 $n_1=n_2p_1^{\beta}(\beta\geqslant 2)$,则 $f(n)=\sqrt{p}$;若 $n_1=n_2p_1,(n_2,p_1)=1$,则

$$I_1=\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_{\alpha}(n_1p^2)f^2(n_1p^2)$$

$$=\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1<p}}\delta_{\alpha}(n_2p_1p^2)f^2(n_2p_1p^2)+\sum_{\substack{n_2p_1^{\beta}p^2\leqslant x\\ p_1<p}}\delta_{\alpha}(n_2p_1^{\beta}p^2)p$$

$$=\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1>\sqrt{p}}}\delta_{\alpha}(n_2p_1p^2)p_1^2+\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1\leqslant\sqrt{p}}}\delta_{\alpha}(n_2p_1p^2)p+\sum_{\substack{n_2p_1^{\beta}p^2\leqslant x\\ p_1<p}}\delta_{\alpha}(n_2p_1^{\beta}p^2)p。\tag{2}$$

由引理2和引理4可得

$$\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1>\sqrt{p}}}\delta_{\alpha}(n_2p_1p^2)p_1^2$$

$$=\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1>\sqrt{p}}}\delta_{\alpha}(n_2)(1+p_1^{\alpha})(1+p^{\alpha}+p^{2\alpha})p_1^2$$

$$=\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1>\sqrt{p}}}\delta_{\alpha}(n_2)(p_1^2+p_1^{\alpha+2})(1+p^{\alpha}+p^{2\alpha})$$

$$=\sum_{n_2p_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\delta_{\alpha}(n_2)(p_1^2+p_1^{\alpha+2})\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n_2p_1}}}(1+p^{\alpha}+p^{2\alpha})$$

$$\ll\frac{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\ln x}\sum_{n_2p_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\delta_{\alpha}(n_2)(p_1^2+p_1^{\alpha+2})$$

$$\ll\frac{x^{\frac{4}{3}\alpha+\frac{17}{6}}}{\ln^2 x}。\tag{3}$$

$$\sum_{\substack{n_2p_1p^2\leqslant x\\ p_1\leqslant\sqrt{p}}}\delta_{\alpha}(n_2p_1p^2)p=\sum_{n_2p_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\delta_{\alpha}(n_2)(1+p_1^{\alpha})\cdot\sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n_2p_1}}}(p+p^{\alpha+1}+p^{2\alpha+1})$$

$$\ll\frac{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\ln x}\sum_{n_2\leqslant\frac{x^{\frac{1}{3}}}{p_1}}\delta_{\alpha}(n_2)\ll\frac{x^{\alpha+\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}。\tag{4}$$

同理可得 $\sum\limits_{\substack{n_2p_1^{\beta}p^2\leqslant x\\ p_1<p}}\delta_\alpha(n_2p_1^{\beta}p^2)p\ll\frac{x^{\alpha+\frac{11}{6}}}{\ln^2 x}$。 (5)

由(2),(3),(4),(5)式可得

$$I_1\ll\frac{x^{\frac{4}{3}\alpha+\frac{17}{6}}}{\ln^2 x}。\qquad (6)$$

类似于上述方法,同样可以得到

$$I_2\ll\frac{x^{\frac{4}{3}\alpha+3}}{\ln^2 x}。\qquad (7)$$

由引理3可得

$$\begin{aligned}I_3&=\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_\alpha(n_1p^2)p^2\\
&=\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_\alpha(n_1)(p^2+p^{\alpha+2}+p^{2\alpha+2})\\
&=\sum_{\substack{n_1p^2\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_\alpha(n_1)(p^{2\alpha+2}+O(p^{\alpha+2}))\\
&=\sum_{n_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\delta_\alpha(n_1)\sum_{p^2\leqslant\frac{x}{n_1}}p^{2\alpha+2}\\
&\quad+O\left(\sum_{n_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\delta_\alpha(n_1)\sum_{p^2\leqslant\frac{x}{n_1}}p^{\alpha+2}\right)\\
&=\sum_{n_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\delta_\alpha(n_1)\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)n_1^{2\alpha+3}(\ln x-\ln n_1)}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=2}^{k}\frac{b_i\cdot x^{2\alpha+3}\cdot\ln^i n_1}{n_1^{2\alpha+3}\ln^i x}+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{n_1^{2\alpha+3}\ln^{k+1}x}\right)\right)\\
&\quad+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{\ln^{k+1}x}\right)\\
&=\frac{\zeta(\alpha+3)\zeta(2\alpha+3)x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{2\alpha+3}}{\ln^i x}\\
&\quad+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{\ln^{k+1}x}\right),\qquad (8)\end{aligned}$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

(Ⅲ)若 $n=n_1p^{\beta}(n)$,$\beta\geqslant 3$,注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{n_1p^{\beta}\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_\alpha(n_1p^{\beta})p^2=\sum_{\substack{n_1p^{\beta}\leqslant x\\ p(n_1)<p}}\delta_\alpha(n_1)(p^2+p^{\alpha+2}\\
&\quad+p^{2\alpha+2}+\cdots+p^{\alpha\beta+2})\\
&=\sum_{n_1\leqslant x}\delta_\alpha(n_1)\sum_{p\leqslant\left(\frac{x}{n_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}}(p^2+p^{\alpha+2}+p^{2\alpha+2}+\cdots+\\
&\quad p^{\alpha\beta+2})\\
&\ll\sum_{n_1\leqslant x}\delta_\alpha(n_1)\sum_{p\leqslant\left(\frac{x}{n_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}}p^{\alpha\beta+2}\\
&\ll\frac{x^{\alpha+\frac{4}{\beta}}}{\ln x}\sum_{n_1\leqslant x}\delta_\alpha(n_1)\ll\frac{x^{2\alpha+\frac{7}{3}}}{\ln^2 x}。\qquad (9)\end{aligned}$$

因此,在这种情况下,

$$\sum_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)(f(n)-p(n))^2\ll\frac{x^{2\alpha+\frac{7}{3}}}{\ln^2 x}。$$

综上三种情况可得

$$\begin{aligned}&\sum_{n\leqslant x}\delta_\alpha(n)(f(n)-p(n))^2\\
&=\frac{\zeta(\alpha+3)\zeta(2\alpha+3)x^{2\alpha+3}}{(2\alpha+3)\ln x}\\
&\quad+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^{2\alpha+3}}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{2\alpha+3}}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}$$

其中 $c_i(i=2,3,\cdots,k)$ 为可计算的常数。

参考文献:

[1] Tabirca Sabin. About Smarandache multiplicative function [J]. Octogon,1999,7:169-170.

[2] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报(中文版),2006,49(5):1009-1012.

[3] Yi Yuan. On the value distribution of the Smarandache multiplicative function [J]. Scientia Magna,2008,4(1):67-71.

[4] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.

[5] Tom M Apostol. Introduction to analytic number theory [M]. New York:Spring-Verlag,1976.

[6] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京:科学出版社,1999.

[责任编辑 毕 伟]

On the Hybrid Mean Value of the Smarandache Multiplicative Function and the Divisor Function

LU Wei-yang[1], GAO LI[2]

(1. Yan'an Senior High School, Yan'an 716000, China; 2. College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: The elementary method and analytic method were performed to study the hybrid mean value involving the Smarandache multiplicative function $f(n)$, $p(n)$ and the divisor function $\delta_\alpha(n)$, and a sharper asymptotic formula was proposed.

Key words: Smarandache multiplicative function; divisor function; hybrid mean value; asymptotic formula